文章编号:1005-3085(2011)02-0260-05

六角形蜂窝网络的反馈数*

周书明[1,2]

(1- 福建师范大学数学与计算机科学学院，福州 350007； 2- 中国科学技术大学数学系，合肥 230026)

摘 要: 一个图的反馈点集指的是在去掉时导致图无圈的节点子集. 反馈集问题来源于组合电路设计，在操作系统死锁预防，人工智能的贝叶斯推断、网络理论有大量应用. 六角形蜂窝网络是一种新近提出的并行计算互连网络. 本文通过构造的方法求出了蜂窝网格和蜂窝圆环面网络的反馈数.

关键词: 蜂窝网络；反馈集；消圈数；反馈数

分类号: **AMS**(2000) 05C20 **中图分类号**: O175.5 **文献标识码**: A

1 引言

在图论中，图的圈秩定义为需要从一个图中去掉的最小数目的边，使残存图没有圈，更明确地说，如果一个图 G 有 n 个顶点、m 条边、k 个连通分支，那么图的圈秩 $\rho(G)=m-n+k$，圈秩也称为 Betti Number. 但是针对去点的情形却没有简单解，对一些特殊的图结构求解也是非常困难的，这就是所谓的消圈数 (记为 $\nabla(G)$) 问题[1]. 在组合网络理论中，在一个简单无向网络删去某些节点，使剩下节点的导出子图没有圈，则称删去的节点集为该图的反馈点集. 规模最小的反馈点集称图的最小反馈点集，最小反馈点集中的节点数称为反馈数[2,3].

确定图的最小反馈点集问题，因其在诸多领域内的广泛应用而受到重视. 如在互联网中，如果网络有回路，广播消息会一直在网桥环网中传递，形成“广播风暴”，阻塞网络. 解决这个问题的做法就是想办法尽可能少地关闭一些网桥，使剩下的网络不再有回路. 对一般图确定最小反馈点集是一个 NP-hard 问题. 至今，人们只能对一些特殊的图给出了求最小反馈点集的多项式时间的算法[4,5]. 一些可作为网络拓扑的图的反馈数的上、下界陆续得到，如网格网络和蝴蝶网络[6,7]、超立方体[8]、星图[9]、有向分裂星图[10]、三正则凯莱图[11]、洗牌交换网络、De Bruijn 网络和 Kautz 网络[12,13].

定义 1[1,2] 无向图 $G(V,E)$ 的一个反馈节点集 F 是 V 的一个子集，若从图 G 中删除 F 中的所有节点及其相关联的边后所得的余图 G' 没有环. 若 F 是 G 中所有反馈节点集中基数最小的一个，就称它为 G 的一个最小反馈节点集，$|F|$ 称为反馈数.

引理 1[2] 设 $G(V,E)$ 是一个图，$|V|=n$, $|E|=m$，那么反馈数至多为 $m-n+1$.

由上述引理易得:

引理 2[1] 设 $G(V,E)$ 是一个连通图，且有 $|V|=n$, $|E|=m$，顶点节点度序列为 $d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n$，如果 $\nabla(G)=s$，那么

$$\sum_{i=1}^{s}(d_i-1)\geq m-n+1.$$

收稿日期: 2009-06-01. **作者简介**: 周书明 (1972年7月生)，男，博士，副教授. 研究方向：图论与网络优化.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (61072080)；福建省高校服务海西建设重点项目.

由引理 2 易得一般图结构的反馈集大小的一个下界：

引理 3[1,2]　设图 $G(V,E)$ 的最大度为 r，那么 G 的任意反馈集至少有 $\frac{|E|-|V|+1}{r-1}$.

2　六角形蜂窝网络的反馈数

根据图论知识，已经有许多网络拓扑结构被提出来．一些经典结构 (超立方体、网格等) 已被广泛的研究和应用．最近，Stojmenovic 提出一种新的网络[14]，六角形蜂窝网格．该网络是一种平面拓扑的互连网络，它类似于二维网格，不过节点连接度只有三，比网格少一，而同时具有类似网格的拓扑性质 (对称性、低连接度、可递归构造性等)，有些特性还优于网格[14-17]．文献 [14] 中提出了一个简单的单播路由算法．广播算法的研究主要有 Carle 提出的一种 all-to-all 全广播算法[18].

定义 2[14]　蜂巢网格网 (Honeycomb Meshes, HM_t) 可递归地定义如下：HM_1 为正六边形，HM_2 是在 HM_1 外围附六个六边形，HM_t 是在 HM_{t-1} 的边界附加了 $6(t-1)$ 个正六边形，其结构和连边方式如图 1 至图 3.

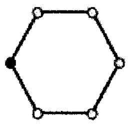


图 1: HM_1

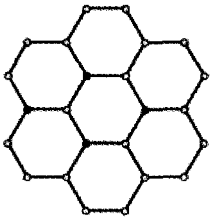


图 2: HM_2

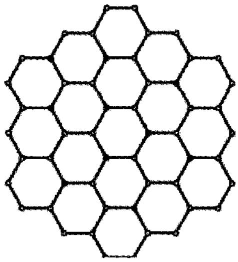


图 3: HM_3

引理 4[14]　蜂巢网格网络 HM_t 有 $6t^2$ 个节点，$9t^2-3t$ 条边.

引理 5　设蜂巢网格网络 HM_t 的最小反馈集为 F，则有

$$|F| \geq \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1.$$

证明　因为蜂巢网格网络 HM_t 有 $|V|=6t^2$ 个节点，$|E|=9t^2-3t$ 条边，由引理 3 可得

$$|F| \geq \frac{|E|-|V|+1}{r-1} = \frac{9t^2-3t-6t^2+1}{3-1} = \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}.$$

又 $|F|$ 是正整数，而 $\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t+1$ 为整数，则 $\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}$ 为假分数，从而

$$|F| \geq \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1.$$

引理 6　设蜂巢网格网络 HM_t 的最小反馈集为 F，则有

$$|F| \leq \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1.$$

证明　我们通过如下递归方法构造一个反馈集，从而得到 HM_t 反馈数的一个上界：

HM_1 为一个正六边形，当任意去掉其中的一个点，HM_1 残存图没有回路，如图 1．HM_2 的边界是六个正六边形两两相连，在内部六边形上间隔去掉三个顶点，就可以破坏这六个

正六边形形成的圈，最后只需边界再任意去掉一个点，总共去掉四个点就可保证 HM_2 残存图就没有回路，如图2. HM_3 的边界是十二个正六边形两两相连，在内部六边形上间隔去掉三个顶点，就可以破坏这六个正六边形形成的圈，在其中间一层每间隔两个节点，共去掉 $3\times 2=6$ 个节点，最后只需从边界上任意去掉一个点，总共去掉 $3\times 1+3\times 2+1=10$ 个点就可保证 HM_3 的残存图没有回路，如图3. 由递归构造可知，HM_t 需去掉

$$3\times 1+3\times 2+\cdots+3\times(t-1)+1=\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t+1$$

个点后，残存图就没有回路. 于是，若 F 为 HM_t 的最小反馈集，则有

$$|F|\leq\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t+1.$$

综合上述两引理知：

定理1 设蜂巢网格网络 HM_t 的最小反馈集为 F，则有

$$|F|=\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t+1.$$

定义3[14,16] 为了使蜂巢网格 HM_t 具有边对称和点对称性质，以 HM_t 的中心为原点，以与 HM_t 的三种走向的边平行的方向建立坐标系. 将 HM_t 的在边界上的关于轴对称的2度点之间连边，得到的网络称为蜂巢圆环面 HT_t.

引理7[14,16] 蜂巢圆环面网络 HT_t 有 $6t^2$ 个节点，$9t^2$ 条边.

类似于引理5的证明有：

引理8 设蜂巢圆环面网络 HT_t 的最小反馈集为 F，则有

$$|F|\geq\begin{cases}\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}, & t\text{ 为奇数},\\ \frac{3}{2}t^2+1, & t\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

引理9 设蜂巢园环网络 HT_t 的最小反馈集为 F，则有

$$|F|\leq\begin{cases}\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}, & t\text{ 为奇数},\\ \frac{3}{2}t^2+1, & t\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

证明 我们通过如下递归方法构造一个反馈集，从而得到反馈数的一个上界：

1) 考虑蜂巢园环网络 HT_t，其中 t 为奇数：HT_1 为 HM_1 通过边界上的2度点之间连边得到，当任意去掉其中两个间隔的点，HT_1 残存图就没有回路，如图4. HT_3 为 HM_3 通过边界上的2度点之间连边得到，HT_3 内部的去点方式和 HM_3 去点相同，去掉 $3\times 1+3\times 2=9$ 个点. 再考虑边界去的点，把缠绕边分成三组，去掉 $2\times 3-1=5$ 个点，即总共去掉 $9+5=14$ 个点，即得到无圈图，如图5. HT_5 为 HM_5 通过边界上的2度点之间连边得到，HT_5 内部的去点方式和 HM_5 去点相同，去掉 $3\times1+3\times2+3\times3+3\times4=30$ 个点. 再考虑边界去掉的点，把缠绕边分成三组，如图6所示，即每组比 HM_3 相应的每组多去一个点，共去掉 $3\times 3-1=8$ 个点，即总共去掉 $30+8=38$ 个点，即得到无圈图.

当 t 为奇数时，由递归构造可知，HT_t 内部去点方式和 HM_t 一样，内部去掉 $\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t$ 个点，边界 HT_t 中每组比 HT_{t-2} 相应的每组多去一个点，即去掉

$$\frac{t+1}{2}\times 3-1=\frac{3t}{2}+\frac{1}{2}$$

个点，总共去掉

$$\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}$$

个节点.

2) 考虑蜂巢园环网络 HT_t，其中 t 为偶数：HT_2 为 HM_2 通过边界上的2度点之间连边得到，HT_2 内部的去点方式和 HM_2 去点相同，去掉 $3\times1=3$ 个点. 再考虑边界去的点，把缠绕边分成三组，如图7所示去点，去掉 $1\times3+1=4$ 个点，即总共去掉 $3+4=7$ 个点，即得到无圈图. HT_4 为 HM_4 通过边界上的2度点之间连边得到，HT_4 内部的去点方式和 HM_4 去点相同，共去掉 $3\times1+3\times2+3\times3=18$ 个点. 再考虑边界去的点，把缠绕边分成三组，如图8所示去点，即 HT_4 每组比 HT_2 的相应组多去一个点，去掉 $2\times3+1=7$ 个点，即总共去掉 $18+7=25$ 个节点，即得到无圈图. 当 t 为偶数时，由递归构造可知，HT_t 内部去点方式和 HM_4 一样，共去掉 $\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t$ 个点，边界上 HT_t 每组缠绕边比 HT_{t-2} 相应组多去一个点，即去掉

$$\frac{t}{2}\times3+1=\frac{3t}{2}+1$$

个点，总共去掉

$$\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}t+1$$

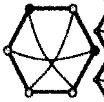
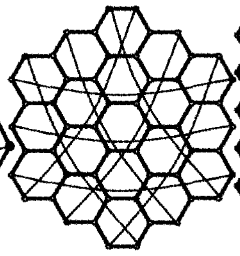
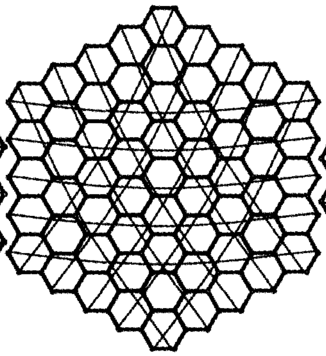
个节点，即得到无圈图. 综合知，HM_t 的最小反馈数

$$|F|\le\begin{cases}\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}, & t\ 为奇数,\\ \frac{3}{2}t^2+1, & t\ 为偶数.\end{cases}$$

综合上述两引理知：

定理2 设蜂巢圆环面 HT_t 的最小反馈集为 F，则有

$$|F|=\begin{cases}\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}, & t\ 为奇数,\\ \frac{3}{2}t^2+1, & t\ 为偶数.\end{cases}$$

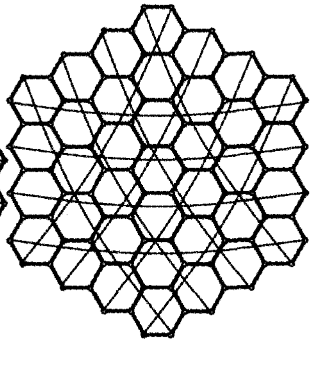


图4: HT_1　图5: HT_3　图6: HT_5　图7: HT_1　图8: HT_3

参考文献:

[1] Beineke L W, Vandell R C. Decycling graphs[J]. Journal of Graph Theory, 1997, 25: 59-77

[2] Festa P, *et al.* Feedback Set Problems[M]. Dordrecht: Handbook of Combinatorial Optimization, 1999

[3] Xu J M. Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks[M]. London: Kluwer Academic Publishers, 2001

[4] Bafna V, *et al.* A 2-approximation algorithm for the undirected feedback vertex set problem[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 1999, 12: 289-297

[5] Liang Y D, Chang M S. Minimum feedback vertex set in cocomparability graphs and convex bipartite graphs[J]. Acta Informatica, 1997, 34: 337-346

[6] Luccio F L. Almost exact minimum feedback vertex set in meshes and butterflies[J]. Information Processing Letters, 1998, 66(2): 59-64

[7] Caragiannis I, *et al.* New bounds on the size of the minimum feedback vertex set in butterflies[J]. Information Processing Letters, 2002, 83(5): 275-280

[8] Focardi R, *et al.* Feedback vertex set in hypercubes[J]. Information Processing Letters, 2000, 76(1-2): 1-5

[9] Wang F H, *et al.* Feedback vertex set in star graphs[J]. Information Processing Letters, 2004, 89(4): 203-208

[10] Wang F H, *et al.* Minimal feedback vertex sets in directed split-stars[J]. Networks, 2005, 45(4): 218-223

[11] Tanaka Y, Shibata Y. A minimum feedback vertex set in the trivalent cayley graph[J]. IEICE-Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 2006, E89-A: 1269-1274

[12] Kralovic R, Ruzicka P. Minimum feedback vertex sets in shuffle-based interconnection networks[J]. Information Processing Letters, 2003, 86(4): 191-196

[13] Xu J M, *et al.* Feedback numbers of kautz digraphs[J]. Discrete Mathematics, 2007, 307(13): 1589-1599

[14] Stojmenovic I. Honeycomb networks: topological properties and communication algorithms[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1997, 8(10): 1036-1042

[15] Yang X F. The diameter of honeycomb rhombic tori[J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17: 167-172

[16] Megson G M, *et al.* Honeycomb tori are Hamiltonian[J]. Information Processing Letters, 1999, 72(3-4): 99-103

[17] Yang X F, *et al.* Generalized honeycomb torus is Hamiltonian[J]. Information Processing Letters, 2004, 92(1): 31-37

[18] Carle J, *et al.* All-to-all broadcasting algorithms on honeycomb networks and applications[J]. Parallel Processing Letters, 1999, 9(4): 539-550

Feedback Number of Honeycomb Networks

ZHOU Shu-ming[1,2]

(1- College of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007;
2- Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract: The feedback vertex set of a graph is a vertices subset which results in an acyclic graph when it is removed. The feedback set problem originates from the combinatorial circuit design, and has found their way into numerous other applications, such as the deadlock prevention in operating system, Bayesian inference in artificial intelligence and network theory. Honeycomb network is a newly introduced interconnection network for parallel computing. By the construction of feedback set, we obtain the feedback number of the Honeycomb mesh and Honeycomb torus.

Keywords: honeycomb network; feedback set; decycling number; feedback number

Received: 01 June 2009. **Accepted:** 03 Mar 2010.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (61072080); the Key Project of Fujian Province Universities Services to the Western Coast of the Straits.